

1 Particules dans des boîtes

🎯 **Objectif** : comparer les statistiques de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein et Fermi-Dirac.

📖 **Théorie** : mécanique statistique.

📌 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

En mécanique statistique, on cherche souvent à déterminer le nombre de configurations de n particules dans k boîtes sujettes à des contraintes supplémentaires. En mécanique classique, les particules sont considérées comme discernables et elles satisfont la statistique de Maxwell-Boltzmann. En mécanique quantique, les particules sont considérées comme indiscernables et elles satisfont deux statistiques possibles :

- **BE** : Si la fonction d'onde qui décrit l'état du système est symétrique sous l'échange de deux particules alors la statistique est celle de Bose-Einstein : un nombre arbitraire de particules peut être placé dans une boîte.
- **FD** : Si la fonction d'onde qui décrit l'état du système est antisymétrique sous l'échange de deux particules alors la statistique est celle de Fermi-Dirac : une boîte peut contenir au plus une seule particule.

Afin d'explorer ce modèle statistique, on se pose les questions suivantes :

- (a) Deux particules qui satisfont tour à tour les statistiques de Maxwell-Boltzmann (MB), de Fermi-Dirac (FD), et de Bose-Einstein (BE) sont placées dans trois boîtes. Déterminer les nombres Ω de configurations possibles Ω_{MB} , Ω_{EB} et Ω_{FD} dans chaque cas.
- (b) On généralise le résultat de la question précédente. On considère n particules qui satisfont tour à tour les statistiques de Maxwell-Boltzmann (MB), de Fermi-Dirac (FD), et de Bose-Einstein (BE) et sont placées dans k boîtes où $k \geq n$. Déterminer les nombres Ω de configurations possibles Ω_{MB} , Ω_{EB} et Ω_{FD} dans chaque cas.
- (c) On examine les statistiques de Maxwell-Boltzmann (MB), de Fermi-Dirac (FD) et de Bose-Einstein (BE) dans l'ensemble canonique où les boîtes représentent des niveaux d'énergie différents. Pour la statistique de Maxwell-Boltzmann, on considère que les particules qui se trouvent dans

des boîtes différentes sont discernables et les particules qui se trouvent dans la même boîte sont indiscernables. Pour les statistiques de Bose-Einstein et Fermi-Dirac, les particules sont indiscernables quelles que soient les boîtes dans lesquelles elles se trouvent. Pour ces trois statistiques, déterminer les nombres de configurations possibles $\Omega_{MB}(N_1, \dots, N_k)$, $\Omega_{BE}(N_1, \dots, N_k)$ et $\Omega_{FD}(N_1, \dots, N_k)$ d'une distribution de N particules dans k boîtes avec N_1 particules dans la boîte 1, N_2 particules dans la boîte 2 et ainsi de suite jusqu'à N_k particules dans la boîte k tel que,

$$N = \sum_{j=1}^k N_j \quad \text{où} \quad N_j \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, k.$$

2 Désintégration radioactive

🎯 **Objectif** : étudier expérimentalement la loi de Poisson.

📖 **Théorie** : probabilités et statistique.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆☆ facultatif.

Les désintégrations radioactives pour des isotopes à longue durée de vie sont décrits par la loi de Poisson. Dans l'expérience de Rutherford-Geiger, les nombres de particules α émises sont comptés durant un ensemble de n intervalles de temps égaux de 7.5 s chacun. Dans le tableau (Tab. 1), le nombre n_k correspond au nombre d'intervalles de temps durant lequel k particules ont été détectées. Déterminer le nombre moyen λ de particules détectées par unité de temps, et comparer le nombre n_k avec le nombre $n p_k$ obtenu à l'aide de la loi de Poisson avec une valeur moyenne λ .

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_k	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

TABLE 1 – Nombre d'intervalles n_k durant lesquels k particules α ont été détectées.

3 Paradoxe des anniversaires

🎯 **Objectif** : calcul de probabilité.

📖 **Théorie** : probabilités et statistique.

📌 **Difficulté** : ★★☆☆ obligatoire.

On considère une classe de n étudiants. On néglige les années bissextiles et on suppose que les dates d'anniversaire sont équiprobables durant les 365 jours de l'année.

- Déterminer la probabilité p_n qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour dans la limite où $n \ll 365$.
- Estimer les nombres minimaux d'étudiants $n(0.5)$ et $n(0.75)$ pour que cette probabilité soit respectivement supérieure à 50% et à 75%.

4 Lois statistiques

🎯 **Objectif** : étudier les liens entre la loi binomiale, la loi de Poisson et la normale.

📖 **Théorie** : probabilités et statistique.

📌 **Difficulté** : ★★☆☆ facultatif.

Les trois lois statistiques principales de distribution de probabilités qui interviennent en physique sont les suivantes :

- La loi binomiale $B(k, n, p)$ modélise la fréquence du nombre de succès k obtenus lors de la réalisation de n expériences aléatoires identiques et indépendantes de probabilité individuelle p ,

$$B(k, n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- La loi de Poisson $P(k, \lambda)$ modélise le comportement du nombre d'événements qui se produisent dans un intervalle de temps fixé. Elle est définie en termes du nombre k d'événements et du nombre moyen λ d'événements comme,

$$P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

3. La loi normale $G(x, \mu, \sigma)$ modélise des phénomènes naturels issus d'événements aléatoires. Elle est définie en termes de la valeur moyenne μ d'une variable aléatoire continue x et de son écart type σ comme,

$$G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Afin de lier ces lois, on cherche à établir les résultats suivants :

- (a) Montrer que dans la limite où le nombre d'expériences $n \rightarrow \infty$ et leur probabilité individuelle $p \rightarrow 0$ de sorte que la valeur moyenne $np \rightarrow \lambda$ ne diverge pas, montrer que la loi binomiale $B(k, n, p)$ tend vers la loi de Poisson $P(k, \lambda)$. Etablir ce résultat à l'aide de la formule de Stirling.
- (b) Montrer que dans la limite où la variable aléatoire $x = k \rightarrow \infty$ et la valeur moyenne $\mu = \lambda \rightarrow \infty$ de sorte que l'écart-type $\sigma = \sqrt{\mu} \simeq x - \mu$, la loi de Poisson $P(k, \lambda)$ tend vers la loi normale $G(x, \mu, \sigma)$.
- (c) Montrer que dans la limite où le nombre d'expériences $n \rightarrow \infty$ pour la variable aléatoire $x = k$ avec une probabilité individuelle p telle que la valeur moyenne $\mu = np \rightarrow \infty$ et l'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, la loi binomiale $B(k, n, p)$ tend vers la loi normale $G(x, \mu, \sigma)$.

5 Marche aléatoire de fourmis sur une barre

🎯 **Objectif** : modéliser un problème de marche aléatoire.

📖 **Théorie** : probabilités et statistique.

🏠 **Difficulté** : ★★☆☆ obligatoire.

On dispose uniformément n fourmis identiques de manière aléatoire le long d'une barre horizontale de longueur ℓ . Les fourmis se déplacent alors aléatoirement vers la gauche ou la droite à une vitesse v constante. Lorsqu'elles entrent en collision, elles changent de sens. Finalement, lorsqu'elles parviennent à une extrémité de la barre, elles tombent. La densité de probabilité uniforme de présence de la k^e fourmi en coordonnée x_k est,

$$f_k(x_k) = \frac{1}{\ell} \quad \text{où} \quad k = 1, \dots, n.$$

Comme les fourmis sont identiques, on peut ignorer leur sens de parcours. En effet, lorsqu'elles entrent en collision élastique, on peut les permuter. Par symétrie,

on peut alors considérer qu'elles se déplacent toutes vers la gauche. La coordonnée de position la plus importante dans ce problème est la coordonnée x de la fourmi qui se trouve le plus proche de l'extrémité droite de la barre. Les coordonnées de position x_1, x_2, \dots, x_n des n fourmis sont des variables aléatoires indépendantes dans l'intervalle $[0, \ell]$. La densité de probabilité d'une telle configuration s'écrit,

$$\begin{aligned} f\left(x = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) &= \\ &= p_1(x_1 \leq x) p_2(x_2 \leq x) \dots p_n(x_n \leq x) \delta\left(x - \max(x_1, x_2, \dots, x_n)\right). \end{aligned}$$

où

$$p_k(x_k \leq x) = \int_0^x f_k(x_k) dx_k,$$

est la probabilité qu'une fourmi quelconque k se trouve dans l'intervalle $[0, x]$ sur la barre.

- Vérifier que la densité de probabilité $f\left(x = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)$ est normalisée.
- Déterminer le temps moyen $\langle t \rangle$ qu'il faut attendre pour que toutes les fourmis soient tombées et que la barre soit vide.

6 Loi exponentielle et accident de travail

🎯 Objectif : étudier le lien entre la loi exponentielle et la loi de Poisson et l'appliquer dans un exemple pratique.

📖 Théorie : probabilités et statistique.

📌 Difficulté : ★★☆☆ facultatif.

La loi de Poisson $P(k, \lambda)$ modélise le comportement du nombre k d'événements durant un intervalle de temps fixé et la loi exponentielle $f(t, \lambda)$ décrit l'intervalle de temps entre deux événements,

$$f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{où} \quad t \geq 0.$$

- En considérant que la variable λT représente le nombre moyen d'événements durant l'intervalle de temps $[0, T]$, montrer que la fonction de répartition exponentielle $p(t \leq T, \lambda)$ est le complément du cas particulier de la loi de Poisson $P(0, \lambda T)$.

(b) On considère une usine employant n ouvriers. On estime qu'un ouvrier quelconque k se blesse en moyenne tous les T_k jours. Les nombres de jours T_k sont des variables aléatoires indépendantes distribuées de manière gaussienne. La densité de probabilité qu'un ouvrier quelconque k se blesse au temps t_k est décrite par la loi exponentielle,

$$f_k(t_k) = \frac{1}{T_k} e^{-t_k/T_k}.$$

Les temps t_1, t_2, \dots, t_n auxquels les n ouvriers se blessent sont des variables aléatoires dans l'intervalle $[0, \infty]$. La densité de probabilité qu'un des n ouvriers se blesse au temps t s'écrit,

$$\begin{aligned} f\left(t = \min(t_1, t_2, \dots, t_n)\right) &= \\ &= p_1(t_1 \geq t) p_2(t_2 \geq t) \dots p_n(t_n \geq t) \delta\left(t - \min(t_1, \dots, t_n)\right). \end{aligned}$$

où

$$p_k(t_k \geq t) = \int_t^\infty f_k(t_k) dt_k,$$

est la probabilité qu'un ouvrier quelconque k se blesse après le temps t . Vérifier que la densité de probabilité $f\left(t = \min(t_1, t_2, \dots, t_n)\right)$ est normalisée et déterminer le temps moyen $\langle t \rangle$ avant qu'un ouvrier se blesse. Evaluer ce temps, dans le cas particulier où la valeur moyenne $\langle T_k \rangle$ des variables aléatoires T_k est T et que leur variance est nulle.